ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$,

τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = 0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B \neq \varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x = +\infty$

ε) Η εικόνα f(**Δ**) ενός διαστήματος **Δ** μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ell nx,\quad x>0$ και $g(x) = \dfrac{x}{1-x},\quad x\neq 1$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$. **Μονάδες 5**

Β2. Αν $h(x) = (f\circ g)(x) = \ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right),\quad x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 6**

Β3. Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \dfrac{e^x}{e^x+1},\quad x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 7**

Β4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.
(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό.)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x,\quad x\in[0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε. **Μονάδες 8**

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$, και $(\varepsilon_2): y = x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$, και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

. **Μονάδες 6**

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$. **Μονάδες 4**

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \dfrac{(f(x)}{x}dx > e-1-\pi$. **Μονάδες 7**

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4} & x\in[-1,0)\\ e^x\eta\mu x, & x\in[0,\pi]\end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in\mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=\pi$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$. **Μονάδες 8**

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 135

Α2. **α)** ψ

β) Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι ψευδής αφού για παράδειγμα για τη συνάρτηση $f(x)=|x|$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$ όμως:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{-x}{x}=-1$$

Δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 73

Α4. **α)** ► Λ **β)** ► Σ **γ)** ► Λ **δ)** ► Σ **ε)** ► Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πεδίο ορισμού της $(f\circ g)(x)$ είναι $\{x\in A_g/g(x)\in A_f\}$ ή $\left\{x\neq1/\frac{x}{1-x}>0\right\}$ όμως $\frac{x}{1-x}>0\Leftrightarrow x-x^2>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$

άρα $A_{fog}=(0,1)$ και $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$

Β2. $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων με

$$h'(x)=\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{x\cdot(1-x)},\ x\in(0,1).$$

$h'(x)>0$ για $x\in(0,1)$ άρα h(x) είναι γνησίως αύξουσα άρα 1-1 επομένως αντιστρέφεται. Η h έχει σύνολο τιμών το $\left(\lim_{x\to0^+}h(x),\lim_{x\to1^-}h(x)\right)$,όμως

$$\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=-\infty\ ,$$

$\lim_{x\to1^-}\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=+\infty$, άρα σύνολο τιμών το $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Επομένως το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.

Θέτουμε $\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)=y\Leftrightarrow\frac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=e^y\cdot(1-x)\Leftrightarrow x=e^y-x\cdot e^y\Leftrightarrow x+x\cdot e^y=e^y\Leftrightarrow x\cdot(1-e^y)=e^y$

$\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{1+e^y}$ άρα $h^{-1}(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β3. $\phi'(x)=\frac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$\phi'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

$$\phi''(x)=\frac{(e^x)'(e^x+1)^2-e^x\left[(e^x+1)^2\right]'}{(e^x+1)^4}=\frac{e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^3}=\frac{e^x\cdot(1-e^x)}{(e^x+1)^3}.$$

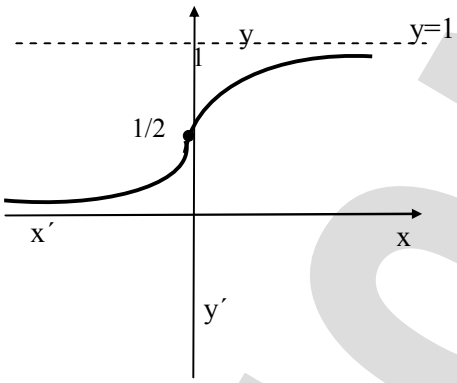
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\phi''(x)$	+	–	
$\Phi(x)$	⌒	⌓	

Η φ(x) είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$ και παρουσιάζει σημείο καμπής για $x_0=0$ με $\phi(0)=\frac{1}{2}$.

Β4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=0$$

Άρα η C_ϕ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y = 1 και στο $-\infty$ την y = 0.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η $f(x)=-\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο [0, π] με $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής, η εφαπτόμενη της C_f στο Μ είναι, $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)\Leftrightarrow y+\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x_0\cdot(x-x_0)$. Η (ε) διέρχεται από το $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ όταν:

$$\frac{-\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Leftrightarrow \eta\mu x_0+\sigma\upsilon\nu x_0\cdot\frac{\pi}{2}-x_0\sigma\upsilon\nu x_0-\frac{\pi}{2}=0.$$

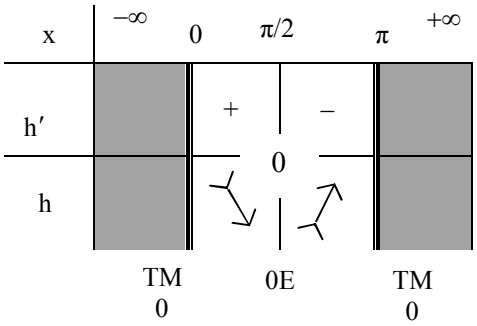
Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\eta\mu x+\frac{\pi}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}$ με $x\in[0,\pi]$.

Η $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}\cdot\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+x\cdot\eta\mu x=\eta\mu x\cdot(x-\frac{\pi}{2})$.

Η $h'(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0$ ή $x-\frac{\pi}{2}=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=\pi$ ή $x=\frac{\pi}{2}$. Ακόμη για $x\in(0,\pi)$ είναι ημx > 0 και $x-\frac{\pi}{2}>0\Leftrightarrow x>\frac{\pi}{2}$.

Το πρόσημο της h΄ και η μονοτονία της h φαίνονται στον πίνακα:

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ



Είναι,

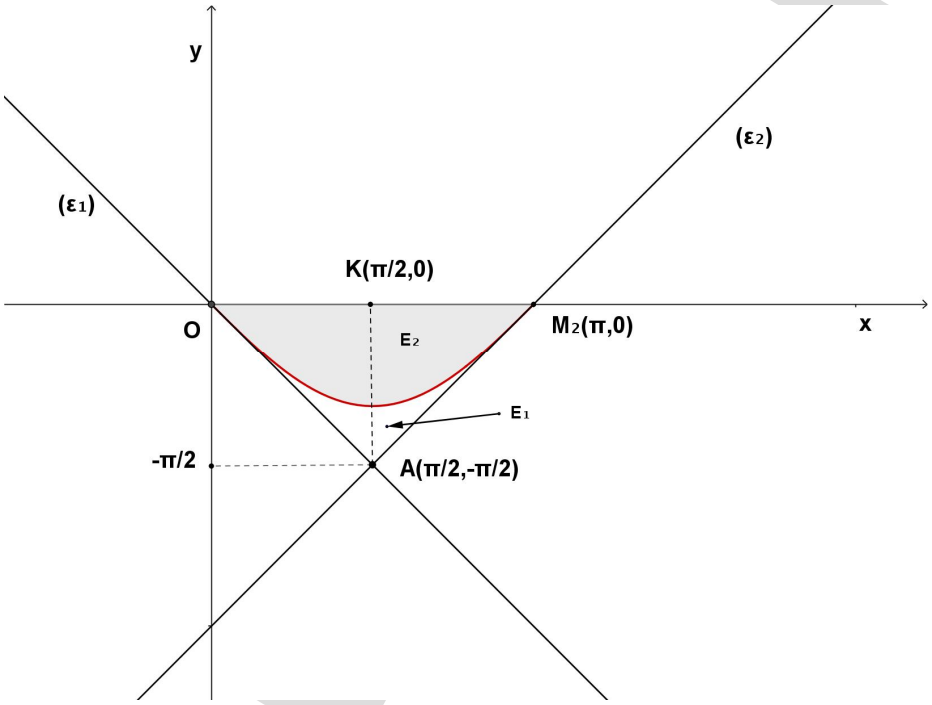
$h(0)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$

$h(\pi)=\frac{-\pi}{2}+\pi-\frac{\pi}{2}=0$

$h(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}=\frac{2-\pi}{2}<0$

Άρα οι $x=0, x=\pi$ είναι οι μοναδικές ρίζες της $h(x)=0$. Επομένως οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι στα σημεία με $x_0=0$ και $x_1=\pi$. Άρα $O(0,f(0))$ ή $O(0,0)$ και $M_2(\pi,f(\pi))$ ή $M_2(\pi,0)$

Γ2. Η εφαπτομένη της C_f στο Ο είναι, $\varepsilon_1: y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=-x$ και στο M_2 είναι $\varepsilon_2: y-f(\pi)=f'(\pi)\cdot(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$



Είναι, $E_2=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=-\int_0^{\pi}-\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=2$ τ.μ. Το εμβαδόν του AOM_2 είναι

$E=(AOM_2)=\frac{1}{2}\cdot(OM_2)\cdot(KA)=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$ τ.μ. άρα $E_1=E-E_2$. Οπότε,

$\frac{E_1}{E_2}=\frac{E-E_2}{E_2}=\frac{E}{E_2}-1=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}-1=\frac{\pi^2}{8}-1$

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Γ3. Η f είναι κυρτή και η y = x-π εφαπτομένη της C_f άρα $f(x) \geq x-\pi$, για κάθε $x \neq \pi$. Έχουμε

$f(x) > x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi > 0$, $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=0$, $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)+\pi\right)=\pi>0$ άρα

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+\pi}{f(x)-x+\pi}=+\infty$

Γ4. Από τη C_f η f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$ άρα η εφαπτομένη της C_f στο M_2 είναι κάτω από τη C_f εκτός του σημείου επαφής. Άρα για κάθε $x\in[0,\pi)$ είναι $f(x) > x-\pi \xrightarrow{x>0} \dfrac{f(x)}{x} > 1-\dfrac{\pi}{x}$ άρα $\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > \int_1^e\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)dx \Leftrightarrow \int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > \left[x-\pi\ell n\,x\right]_1^e$

$\Leftrightarrow \int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx > e-\pi-1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο [-1,0) ως σύνθεση συνεχών. Είναι συνεχής στο (0,π] ως γινόμενο συνεχών.

Στο $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=0.$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x\eta\mu x=0=f(0)$. Άρα η f συνεχής στο $x_0=0$, συνεπώς η f είναι συνεχής στο[-1,π].

Για $x\in[-1,0)$, είναι $f(x)=\sqrt[3]{x^4}=(-x)^{\frac{4}{3}}$, παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων με $f'(x)=-\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}\neq0$, άρα η f δεν έχει κρίσιμα σημεία στο [-1,0).

Για $x\in(0,\pi]$, είναι $f(x)=e^x\eta\mu x$, παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων με $f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$.

Για κάθε $x\in(0,\pi)$ έχουμε, $f'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \overset{\eta\mu x\neq0}{\Leftrightarrow} \sigma\varphi x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pi}{4}$. Άρα η f παρουσιάζει κρίσιμο σημείο στο $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Στο $x_0=0$:

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)}=-\lim\limits_{x\to0^-}(-x)^{\frac{1}{3}}=0.$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x})=1$. Άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$, οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$, συνεπώς το $x=0$ είναι κρίσιμο σημείο της f.

Τελικά η f έχει κρίσιμα σημεία στο $x=0$ και στο $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Δ2. Για $x\in[-1,0)\cup(0,\pi]$ είναι $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}, & x\in[-1,0)\\ e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x), & x\in(0,\pi]\end{cases}$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in[-1,0)$.

Για $x\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$ είναι $f'(x)\neq0$ και f' συνεχής ως γινόμενο συνεχών, άρα η f' διατηρεί πρόσημο στο $(0,\dfrac{3\pi}{4})$. Ακόμη,

$f'(\dfrac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}>0$, άρα $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,\dfrac{3\pi}{4})$.

Για $x\in(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$ είναι $f'(x)\neq0$ και f' συνεχής ως γινόμενο συνεχών, άρα η f' διατηρεί πρόσημο στο $(\dfrac{3\pi}{4},\pi]$. Ακόμη,

$f'(\dfrac{5\pi}{6})=e^{\frac{5\pi}{6}}(\eta\mu\dfrac{\pi}{6}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6})=e^{\frac{5\pi}{6}}(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2})<0$, άρα $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\dfrac{3\pi}{4},\pi]$.

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,\dfrac{3\pi}{4}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ και στο $[\dfrac{3\pi}{4},\pi]$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x = -1 και στο $x=\dfrac{3\pi}{4}$ με τιμές $f(-1)=1$ και $f(\dfrac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ αντίστοιχα. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

x=0 και στο x=π με τιμές $f(0)=0$ και $f(\pi)=0$ αντίστοιχα. Τελικά, η μέγιστη τιμή της f είναι $f(\frac{3\pi}{4})=e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}$ και ελάχιστη τιμή $f(0)=f(\pi)=0$. Συνεπώς $f(A)=[0,e^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}]$.

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
f′	−	+	0	−
f(x)	↘	↗	↘	

Δ3. Έχουμε, $E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx$ όμως,

για $x\in[0,\pi]$ είναι $f(x)-g(x)=e^x(\eta\mu x-e^{4x})$

για $x\geq 0$ είναι $e^{4x}\geq 1$ και $\eta\mu x\leq 1$, όποτε $\eta\mu x\leq 1\leq e^{4x}$, συνεπώς $f(x)-g(x)\leq 0$. Άρα

$E(\Omega)=\int_0^{\pi}-(f(x)-g(x))dx=\int_0^{\pi}g(x)-f(x)dx=\int_0^{\pi}(e^{5x}-e^x\eta\mu x)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=[\frac{1}{5}e^{5x}]_0^{\pi}-I=\frac{1}{5}(e^5-1)-I$, όπου

$I=\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=[e^x\eta\mu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\sigma\upsilon\nu x dx=-[e^x\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx=1+e^{\pi}-I$. Άρα $I=1+e^{\pi}-I\Leftrightarrow I=\frac{1+e^{\pi}}{2}$. Τελικά,

$E(\Omega)=\frac{1}{5}(e^5-1)-\frac{e^{\pi}+1}{2}$. τμ

Δ4. Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in[-1,\pi]$ οπότε

$16e^{\frac{-3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{\frac{-3\pi}{4}}\cdot(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 16f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow f(x)-\frac{(4x-3\pi)^2}{16}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow$

$f(x)-\left(\frac{4x-3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow f(x)-\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2\Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)^2$ **(1)**

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα είναι η $x=\frac{3\pi}{4}$. Για κάθε $x\neq\frac{3\pi}{4}$. Έχουμε ότι $f(x)<f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Αν υπάρχει και δεύτερη ρίζα $x_0\neq\frac{3\pi}{4}$ τότε $f(x_0)<f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\left(x_0-\frac{3\pi}{4}\right)^2<f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\left(x_0-\frac{3\pi}{4}\right)^2<0$ άτοπο.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ
ΣΤΑΥΡΟΣ ΓΕΡΜΑΚΟΠΟΥΛΟΣ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ • ΜΑΡΙΑ ΧΡΙΣΤΟΦΑΚΗ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ