ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 186

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 142

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 161

Α4. **α)** Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η h ορίζεται όταν:

$$\left.\begin{array}{r} x\in A_g \\ g(x)\in A_f \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x\geq 0 \\ g(x)\leq 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x\geq 0 \\ \sqrt{x}\leq 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x\geq 0 \\ x\leq 1 \end{array}\right\} 0\leq x\leq 1 \quad A_h=[0,1]$$

διότι $A_g=[0,+\infty)$ και $A_f=(-\infty,1]$

Είναι $h(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^4-2\left(\sqrt{x}\right)^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$

Άρα $h(x)=\left(x-1\right)^2$ με Π. ορισμού το $A_h=[0,1]$.

Β2. Είναι $h'(x)=2(x-1)\leq 0$. Για κάθε $x\in[0,1]$ (η ισότητα ισχύει μόνο αν $x=1$) $\Rightarrow$ η h είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 1], άρα θα είναι και "1–1".

Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της h^{-1}

Είναι $y=(x-1)^2 \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y\geq 0 \\ \sqrt{y}=|x-1| \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y\geq 0 \\ \sqrt{y}=-x+1 \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y\geq 0 \\ x=1-\sqrt{y} \\ 0\leq 1-\sqrt{y}\leq 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y\geq 0 \\ x=1-\sqrt{y} \\ -1\leq -\sqrt{y}\leq 0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} y\ge 0\\ x=1-\sqrt{y}\\ 0\le\sqrt{y}\le 1\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l} y\ge 0\\ x=1-\sqrt{y}\\ 0\le y\le 1\end{array}\right\}\begin{array}{l} 0\le y\le 1\\ x=1-\sqrt{y}\end{array}\Rightarrow h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}\ \text{με}\ 0\le x\le 1$$

B3. $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & 0\le x<1\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

Η φ είναι συνεχής στο [0, 1) ως πράξεις μεταξύ συνεχών.
Εξετάζουμε τη συνέχεια στο $x_0 = 1$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 1}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)'}{\left(1-x\right)'}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}=\varphi(1).$

Άρα η φ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και επομένως και στο [0, 1]

Επίσης είναι $\varphi(0)=1$ και $\varphi(1)=\dfrac{1}{2}$ δηλαδή $\varphi(0)\neq\varphi(1)$.

Άρα ισχύουν και οι δύο προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ. στο [0, 1].

B4. Αφού $\dfrac{\pi}{6}<$ α $<\dfrac{\pi}{2}$ και στο $[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}]$ η συνάρτηση ημx είναι γνησίως αύξουσα $\to$

ημ$\dfrac{\pi}{6}<$ ημα $<$ ημ$\dfrac{\pi}{2}$ $\to$ $\dfrac{1}{2}<$ ημα <1 $\to$ φ(1) < ημα < φ(0)

Από το B_3 αφού ισχύει το ΘΕΤ θα έχουμε ότι για κάθε αριθμό μεταξύ (φ(1), φ(0)) θα υπάρχει $x_1 \in (0,1)$: $\varphi(x_1)$ = κ.
Επειδή ημα ∈ (φ(1), φ(0)) λόγω (1) $\to$ $\varphi(x_1)$ = ημα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από υπόθεση είναι $f(0)=0$

Για $x<-1$ είναι $f'(x)=-2 \Rightarrow f'(x)=(-2x)' \Rightarrow f(x)=-2x+c_1$

Για $x>-1$ είναι

$$f'(x)=3x^2-1 \Rightarrow f'(x)=(x^3-x)' \Rightarrow f(x)=x^3-x+c_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x+c_1, & x<-1 \\ x^3-x+c_{2,} & x>-1 \\ c_3 & x=-1 \end{cases}$$

Αφού η f ορίζεται στο $\mathbb{R}$.

Είναι $f(0)=0 \Rightarrow 0^2-0+c_2=0 \Rightarrow c_2=0$.

Επίσης η είναι συνεχής στο $\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(-2x+c_1)=\lim_{x\to -1^+}(x^3-x)=c_3$$

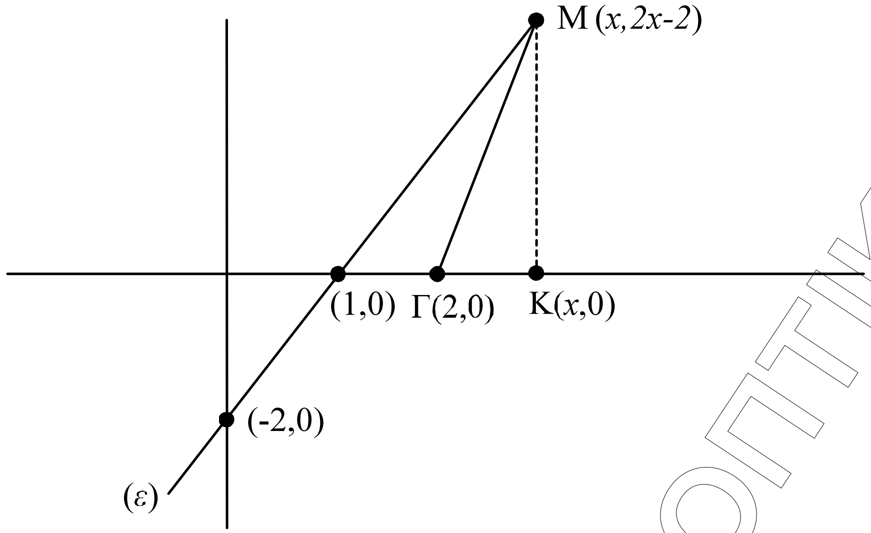
$$\Rightarrow 2+c_1=0=c_3 \Rightarrow c_1=-2,\ c_3=0 \Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x-2, & x<-1 \\ x^3-x, & x>-1 \\ 0, & x=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -2x-2, & x\le -1 \\ x^3-x, & x>-1 \end{cases}$$

Γ2 Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) στο Α είναι:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$ με $x_0 > -1$
Αφού η (ε) τέμνει τον y'y στο -2 θα διέρχεται από το σημείο (0,-2)
$\rightarrow -2 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0) \rightarrow -2 - f(x_0) = -f'(x_0)\, x_0$
$\rightarrow 2 + f(x_0) = f'(x_0)\, x_0$ με $x_0 > -1 \rightarrow 2 + (x_0^3 - x_o) = (3x_0^2 - 1)\, x_0 \Leftrightarrow$
$2 + x_0^3 - x_o = 3x_0^3 - x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$
Άρα η (ε) είναι: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \rightarrow y - 0 = 2(x-1) \rightarrow y = 2x - 2$

Γ3. Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο της (ε) δηλαδή $\mathrm{M}(x,2x-2), \mathrm{K}(x,0)$ και το $\Gamma(2,0)$.
Το εμβαδό του ΜΚΓ είναι

$$E=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{K\Gamma}\cdot \mathrm{MK}=\frac{1}{2}(x-2)(2x-2)=\frac{1}{2}(x-2)2(x-1)=(x-2)(x-1)$$



Επομένως την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t είναι $E(t)=\big(x(t)-2\big)\big(x(t)-1\big)$ με $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$, όπου t_0 η χρονική στιγμή που ζητάμε το $E'(t_0)$.

Είναι $E'(t)=x'(t)\big(x(t)-1\big)+\big(x(t)-2\big)x'(t)$

Άρα τη χρονική στιγμή t_0 είναι: $E'(t_0)=x'(t_0)\big(x(t_0)-1\big)+\big(x(t_0)-2\big)x'(t_0)\Rightarrow$

$$\Rightarrow E'(t_0)=2\cdot\big(3-1\big)+\big(3-2\big)2=4+2=6\ \frac{\text{τετραγωνικές μονάδες}}{\text{sec}}.$$

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\ \underset{u\to+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}}\ \lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}$

Είναι $|\eta\mu u|\le 1\ \overset{u>0}{\to}\ \dfrac{1}{u}|\eta\mu u|\le\dfrac{1}{u}\Rightarrow\left|\dfrac{1}{u}\eta\mu u\right|\le\dfrac{1}{u}\Rightarrow-\dfrac{1}{u}\le\dfrac{1}{u}\eta\mu u\le\dfrac{1}{u}$

Είναι $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{u}\right)=0$ αφού $u\to+\infty$

Επομένως από Κρ. Παρεμβολής θα είναι

$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0\Rightarrow\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$ (1)

$\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1+(-x)^3}$

Αν θέσουμε $-x=t$, όταν $x\to-\infty\Rightarrow t\to+\infty$

Άρα $\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{4-x^3}\ \underset{t\to+\infty}{\overset{-x=t}{=}}\ \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f(t)}{1+t^3}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3-t}{1+t^3}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^3}{t^3}=1$ (2)

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]\ \underset{(2)}{\overset{(1)}{=}}\ 0+1=1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$f(x)=x-\ln(3x)$

i. $f'(x)=1-\dfrac{1}{3x}\cdot 3=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x},\qquad x>0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

x	0		1		$+\infty$
f'		-	0	+	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(1)<0$

$f\left((0,1]\right)\overset{\text{γν.φθίν.}}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0}f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$

το $0\in f\left((0,1]\right)\Rightarrow\exists$ μοναδικό $0<x_1<1: f(x_1)=0$

$f\left([1,\alpha)\right)\overset{\text{γν.αυξ.}}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\alpha}f(x)\right)=[1-\ln 3,1-x)$

δίνει $\lim\limits_{x\to+\alpha}\left(x-\ln(3x)\right)=\lim\limits_{x\to+\alpha}\left(x\left(1-\dfrac{\ln(3x)}{x}\right)\right)$

και $\lim\limits_{x\to+\alpha}\dfrac{\ln(3x)}{x}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{+\alpha}{+\alpha}}{=}}\lim\limits_{x\to+\alpha}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=0$

Άρα $(+a)(1-0)=+a$

Το $0\in f\left([1,+a)\right)\Rightarrow\exists$ μοναδικό $x_2>1: f(x_2)=0$

Δ2.

Αν $\left.\begin{aligned} x_1\le x\le 1 &\overset{f\,\gamma\nu.\varphi\theta\iota\nu.}{\Rightarrow} f(x)\le f(x_1)=0\\ 1\le x\le x_2 &\overset{f\,\gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.}{\Rightarrow} f(x)\le f(x_2)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow f(x)\le 0\ \ \forall x\in[x_1,x_2]$

$$\text{E}=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(\ln 3x-x\right)dx=\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\left(\ln 3x\right)dx}_{I_1}-\underbrace{\int_{x_1}^{x_2}x\,dx}_{I_2}$$

$$\mathrm{I}_1 = \int_{x_1}^{x_2} (x)' \ln(3x)\, dx = \left[x\ln(3x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} x \cdot \frac{1}{x} dx = x_2 \ln(3x_2) - x_1 \ln(3x_1) - (x_2 - x_1)$$

$$\mathrm{I}_2 = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2}$$

$$\mathrm{E} = x_2 \underbrace{\ln(3x_2)}_{x_2} - x_1 \underbrace{\ln(3x_1)}_{x_1} - (x_2 - x_1) - \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2} =$$

$$= x_2^2 - x_1^2 - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1) =$$

$$= (x_2 - x_1)(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Δ3.

Έχω $x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - 1 \Rightarrow 2 - x_1 > 1$

Από το εμβαδόν ισχύει ότι

$$x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2 \overset{f \text{ γν.αύξ. στο} [1, +\alpha)}{\Longrightarrow} f(2 - x_1) < f(x_2) = 0$$

Δ4.

Βρίσκω την εφαπτομένη της f στο x_2

$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$y - 0 = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow$

$y = f'(x_2)(x - x_2)$

Αφού f κυρτή $\Rightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (1)

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = x_2$

Επιπλέον $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(x) + \ln 3 \geq 1$ (2)

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Προσθέτοντας (1) + (2) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2f(x) + \ln 3 > 1 + f'(x_2)(x - x_2)$

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη